宇宙の膨張

環境教育課程　環境教育コース
金光研究室　265613　西村智哉

１．はじめに

我々のいる宇宙がその誕生から膨張を続けていることは，広く知られている。さらにアインシュタイン以来の研究と観測の積み重ねによって，宇宙の膨張速度が一定ではないことがわかってきた。

本研究においては，過去と現在，そして未来の宇宙の膨張の様子を表す方程式をなるべく簡略化して解いた。その結果をもとに，宇宙の膨張速度を決める要素や，膨張速度に変化がみられる理由について考察する。

２．フリードマン＝ルメートル方程式

2.1　式の導出

アインシュタインは時空構造と物質・エネルギー分布を関連づける基本方程式を導いた。アインシュタイン方程式と呼ばれるその方程式は，状況設定に応じてブラックホールや宇宙構造などさまざまな問題に適用することができる。そして，アインシュタイン方程式を宇宙構造に適用したものが，フリードマン＝ルメートル方程式である。ここで，宇宙は一様で等方であるという宇宙原理を仮定すると，もとのアインシュタイン方程式から導かれるフリードマン＝ルメートル方程式は以下の 2 本となる。

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2}+\frac{kc^2}{a^2}-\frac{\Lambda c^2}{3}=\frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon=\frac{8\pi G}{3}\rho \qquad ・・・(1)$$

$$\frac{2\ddot{a}}{a}+\frac{\dot{a}^2}{a^2}+\frac{kc^2}{a^2}-\Lambda c^2=-\frac{8\pi G}{c^2}p \qquad ・・・(2)$$

これらは変数aの時間tに関する微分方程式の形になっている。変数a(t)はスケールファクターと呼ばれる量で，宇宙の大きさを表す因子である。変数aの上の“•（ドット）”は時間微分d/dtを表し，ドットが 2 つの場合は 2 階微分を意味している。他に，cは光速，Λは宇宙項，Gは万有引力定数，εは物質のエネルギー密度，ρは物質密度，pは圧力である。また，kは宇宙の曲率を決めるパラメータであり，その値ではなく符号が重要になる。

本研究では，（1）式を解くことで考察を進めていく。

2.2　必要なパラメータの定義

まず，（1）式を綺麗な形で積分するための準備として，3 つのパラメータを定義しておく。

第一に，宇宙のスケールファクターaとその時間微分の比として，

$$H(t)\equiv\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}=\frac{\dot{a}}{a} \quad , \quad H_0\equiv H(t_0)=\frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}=\frac{\dot{a}_0}{a_0} \qquad ・・・(3)$$

のようにハッブルパラメータ$H(t)$を定義する。これは宇宙の膨張速度を表すパラメータで，スケールファクターとその時間微分が時間とともに変化するのに伴ってこちらも変わっていく。そして，現在（t_0＝137 億年）時点でのハッブルパラメータの値が，ハッブル定数H_0である。

第二に，ハッブルパラメータを用いて，

$$\rho_c(t)=\frac{\varepsilon_c(t)}{c^2}\equiv\frac{3H^2(t)}{8\pi G}\quad,\quad \rho_{c,0}=\frac{\varepsilon_{c,0}}{c^2}\equiv\frac{3H_0^2}{8\pi G}\qquad\cdot\cdot\cdot(4)$$

のように定義されるのが，宇宙の曲率を決める重要なパラメータの臨界密度$\rho_c(t)$である。ハッブルパラメータが時間の関数であるため，臨界密度も時間と共に変化する。また，ハッブル定数を用いて現在時点での臨界密度$\rho_{c,0}$を定義する。

第三に，実際の宇宙に存在する通常物質やダークマター，ダークエネルギーなどと臨界密度の比として，

$$\Omega(t)\equiv\frac{\rho(t)}{\rho_c(t)}=\frac{\rho}{\rho_c}\quad,\quad \Omega_0\equiv\frac{\rho(t_0)}{\rho_{c,0}}=\frac{\rho_0}{\rho_{c,0}}\qquad\cdot\cdot\cdot(5)$$

のように密度パラメータ$\Omega(t)$を定義する。これには，密度パラメータが 1 より大きいか小さいかだけで，宇宙の膨張の様子を大まかに知ることができるという利点がある。また，現在時点での密度パラメータがΩ_0である。

2.3　式の書き換え

必要なパラメータの定義が揃ったら，積分しやすいように前述したハッブル定数や臨界密度を使って（1）式を書き換える。

まず，宇宙項Λがないとして（1）式に移項と書き換えを行うと，以下の（6）式のようになる。また，その（6）式全体を（3）のハッブルパラメータの 2 乗で割り，（5）式を用いて書き換えると，（7）式のようになる。

$$\frac{kc^2}{a^2}=\frac{8\pi G}{3}\rho-\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2=\frac{8\pi G}{3}\rho-H^2=\frac{8\pi G}{3}(\rho-\rho_c)\qquad\cdot\cdot\cdot(6)$$

$$\frac{kc^2}{a^2H^2}=\frac{\rho}{\rho_c}-1=\Omega-1\qquad\cdot\cdot\cdot(7)$$

ここで，kはその符号が重要であることを踏まえてこれらの式を見ていくと，以下のような対応関係になる。

$k=1:\rho>\rho_c$（$\Omega>1$）　閉じた宇宙，宇宙の曲率は正

$k=0:\rho=\rho_c$（$\Omega=1$）　平坦な宇宙，宇宙の曲率は 0

$k=-1:\rho<\rho_c$（$\Omega<1$）　開いた宇宙，宇宙の曲率は負

次に，宇宙項Λがある場合についても先ほどと同様にして書き換えを行う。（1）式のΛ項である$\Lambda c^2/3$を，同等なエネルギー密度ρ_Λ（$\equiv\Lambda c^2/8\pi G$）に換算することで，以下の（8）式が得られる。さらに，宇宙項にかかわる密度パラメータΩ_Λ（$\equiv\rho_\Lambda/\rho_c$）を用意することで，（9）式のようになる。

$$\frac{kc^2}{a^2}=\frac{8\pi G}{3}\rho+\frac{\Lambda c^2}{3}-\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2=\frac{8\pi G}{3}\rho+\frac{8\pi G}{3}\rho_\Lambda-H^2\qquad\cdot\cdot\cdot(8)$$

$$\frac{kc^2}{a^2H^2}=\frac{\rho}{\rho_c}+\frac{\rho_\Lambda}{\rho_c}-1=\Omega+\Omega_\Lambda-1\qquad\cdot\cdot\cdot(9)$$

宇宙項がある場合でも，kに関する対応関係は前述の通りである。

2.4　式の積分

最後に仕上げとして式の積分を行う。まずはエネルギー密度ρを，

輻射エネルギー密度：ρ_r　，物質エネルギー密度：ρ_m　，ダークエネルギー密度：ρ_Λ

のように区別すると，(8) 式は (5) 式を利用しつつ以下のように変形できる。

$$H^2+\frac{kc^2}{a^2}=\frac{8\pi G}{3}(\rho+\rho_\Lambda)=\frac{8\pi G}{3}(\rho_r+\rho_m+\rho_\Lambda)=H^2\left(\frac{\rho_r+\rho_m+\rho_\Lambda}{\rho_c}\right) \quad \cdot\cdot\cdot (10)$$

次に，先ほど区別した 3 種類のエネルギー密度と全存在物に関する現在時点での密度パラメータを，

$$\Omega_{r,0}\equiv\frac{\rho_{r,0}}{\rho_{c,0}} \quad , \quad \Omega_{m,0}\equiv\frac{\rho_{m,0}}{\rho_{c,0}} \quad , \quad \Omega_{\Lambda,0}\equiv\frac{\rho_{\Lambda,0}}{\rho_{c,0}}$$

$$\Omega_0\equiv\frac{\rho_{r,0}+\rho_{m,0}+\rho_{\Lambda,0}}{\rho_{c,0}}=\Omega_{r,0}+\Omega_{m,0}+\Omega_{\Lambda,0}$$

のように定義すると，(10) 式はいくつかの手順を踏んで最終的に以下のようになる。

$$\frac{H}{H_0}=\sqrt{\frac{a_0^4}{a^4}\Omega_{r,0}+\frac{a_0^3}{a^3}\Omega_{m,0}+\Omega_{\Lambda,0}+\frac{a_0^2}{a^2}(1-\Omega_0)} \quad \cdot\cdot\cdot (11)$$

これは一見すると複雑そうな式だが，高校数学でも習う変数分離型になっているので，

$$\mathrm{y}(t)\equiv\frac{a(t)}{a_0}$$

のようにスケールファクターを現在値で規格化した変数yを定義すると，(11) 式の右辺をyだけの関数にすることができる。そして (11) 式の両辺を積分すると，

$$H_0t=\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{\Omega_{r,0}\frac{1}{y^2}+\Omega_{m,0}\frac{1}{y}+\Omega_{\Lambda,0}y^2+(1-\Omega_0)}} \quad \cdot\cdot\cdot (12)$$

という結果を得ることができる。なお，右辺に積分記号が残っているが，これは特定の条件を与えていくつかの項を無視することで解決することができる。

3．宇宙の膨張

3.1 フリードマン宇宙膨張モデル

フリードマンは方程式を解くときに，宇宙に存在するものは物質のみである (すなわち$\Omega_0=\Omega_{m,0}$) と仮定した。この仮定に基づくと (12) 式は，

$$H_0t=\int_0^y\frac{\sqrt{y}dy}{\sqrt{\Omega_{m,0}+(1-\Omega_{m,0})y}}$$

のように書き直せる。この仮定のもとで得られるフリードマン＝ルメートル方程式の解はフリードマン解と呼ばれ，「平坦な宇宙 ($k=0$，$\Omega_{m,0}=1$の場合)」「閉じた宇宙 ($k=1$，$\Omega_{m,0}>1$の場合)」「開いた宇宙 ($k=-1$，$\Omega_{m,0}<1$の場合)」という 3 種類がある。

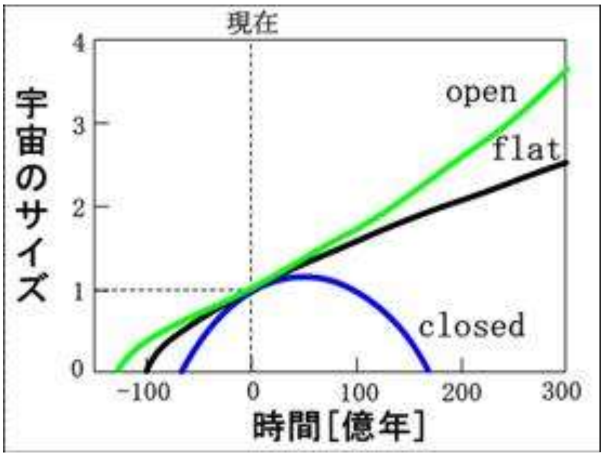

図 1．膨張する宇宙モデル 1

図１は３種類のフリードマン解による宇宙の膨張の様子をグラフにしたもので，縦軸が規格化されたスケールファクターyによる宇宙の大きさ，横軸が現在時点を基準とした時間を表している。そして「open」のグラフが開いた宇宙を，「flat」のグラフが平坦な宇宙を，「closed」のグラフが閉じた宇宙の様子を表している。

3.2　ルメートル宇宙膨張モデル

長年にわたる観測の積み重ねにより，我々のいる宇宙の空間構造が平坦であることや，宇宙項に相当するダークエネルギーというものが存在することなどがわかってきた。そこで，

$$\Omega_0 = \Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} = 1$$

と仮定してみる。すると，（12）式は以下のように書き直せる。

$$H_0 t = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{\Omega_{m,0}\frac{1}{y} + \Omega_{\Lambda,0} y^2}} = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{\Omega_{m,0}\frac{1}{y} + (1-\Omega_{m,0}) y^2}} \quad \cdot\cdot\cdot (13)$$

そして，物質の密度パラメータとダークエネルギーの密度パラメータについて，

$$\omega_{m/\Lambda} \equiv \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}}\right)^{1/3}$$

のように表すと，（13）式の積分は最終的に以下のようになる。

$$H_0 t = \frac{2}{3\sqrt{1-\Omega_{m,0}}} \ln\left[\left(\frac{y}{\omega_{m/\Lambda}}\right)^{3/2} + \sqrt{1+\left(\frac{y}{\omega_{m/\Lambda}}\right)^3}\right]$$

この式からわかるように，宇宙膨張の様子はスケールファクターyとパラメータ$\omega_{m/\Lambda}$によって変化する。具体的には，

$y < \omega_{m/\Lambda}$：減速膨張

$y > \omega_{m/\Lambda}$：加速膨張

のようになる。

現在ではパラメータ$\omega_{m/\Lambda}$の値は 0.7 程度であると考えられているため，yがその値を超えて増加するにしたがって，宇宙の膨張は加速していくだろう。以上の内容を図１のグラフに反映すると，図２の「new」のグラフのようになる。

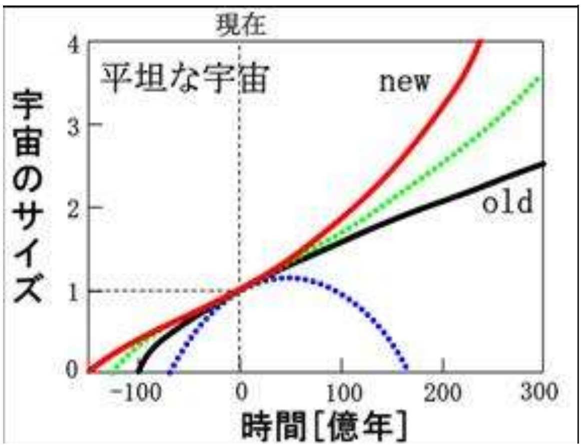

図 2. 膨張する宇宙モデル 2

４．まとめ

今回はフリードマン＝ルメートル方程式を解いて考察することで，宇宙の密度などのいくつかの要素から宇宙の膨張の様子を算出できることが確認できた。また，フリードマン＝ルメートル方程式の積分の際には，高校数学・高校物理のレベルでも理解可能な数式が多く登場することもわかった。

今後は方程式を解いた後のグラフ作成の過程を詳しく考察することや，高校生レベルの天文教育への応用を試みていくことを課題としたい。